

1) Множества. Основные определения. Конечные и бесконечные множества. Ограниченные и неограниченные множества. Пустое множество. Подмножество. Способы задания множеств. Примеры. Мощность множества. Счётные и несчётные множества. Примеры и доказательства.

- Примеры множеств.
- Основные определения (элементы множества; принадлежность/непринадлежность элемента множеству; конечное множество; бесконечное множество; числовое множество; виды числовых множеств; ограниченное множество; неограниченное множество; пустое множество; подмножество).
- Примеры для всех выше перечисленных определений.
- Способы задания множеств (два способа; сформулировать; примеры).
- Равные множества. Определение. Пример.
- Мощность множества. Понятие.
- Взаимно однозначное соответствие между множествами. Определение.
- Счётные множества. Определение. Пример.
- Несчётные множества. Определение. Пример.
- Привести доказательства счётности множеств натуральных, целых, рациональных, алгебраических чисел.
- Доказательство несчётности множества действительных и иррациональных чисел.

2) Множества. Алгебра множеств. Формула включений-исключений. Доказательства.

- Определение действия над множествами на языке кванторов. Проиллюстрировать действия над множествами на кругах Эйлера-Венна.
- Привести формулы включений-исключений для двух, трёх и n множеств и вывести их.
- Примеры.
- Сформулировать законы алгебры множеств и доказать некоторые из них (любые 5 шт.):
- закон коммутативности пересечения множеств;
- закон коммутативности объединения множеств;
- закон ассоциативности пересечения множеств;
- закон ассоциативности объединения множеств.;
- дистрибутивности пересечения относительно объединения;
- дистрибутивности объединения относительно пересечения;
- законы идемпотентности;
- законы действия с универсальным и пустым множествами;
- законы де Моргана;
- законы двойного дополнения).

3) Множества точек на плоскости. Эллипс. Определение. Каноническое уравнение эллипса. Построение эллипса. Оптическое свойство эллипса.

- Определение эллипса.
- Вывод канонического уравнения эллипса (два доказательства!).
- Исследование линии (точки пересечения с осями координат; монотонность; симметрия; ограниченность).
- Построение линии.
- Пример.
- Формулировка оптического свойства и его доказательство.

4) Множества точек на плоскости. Окружность. Каноническое уравнение окружности. Окружность Аполлония.

- Определение окружности.
 - Вывод канонического уравнения окружности (два доказательства!).
 - Сформулировать задачу о ГМТ плоскости, отношение расстояний от каждой из которых до двух данных точек есть величина постоянная и решить её.
 - Определение окружности Аполлония.
 - Пример.
-

5) Множества точек на плоскости. Гипербола. Определение. Каноническое уравнение гиперболы. Построение гиперболы. Оптическое свойство гиперболы.

- Определение гиперболы.
 - Вывод канонического уравнения гиперболы (два доказательства!).
 - Исследование линии (точки пересечения с осями координат; монотонность; симметрия; ограниченность; асимптоты).
 - Построение линии.
 - Пример.
 - Формулировка оптического свойства и его доказательство.
-

6) Множества точек на плоскости. Парабола. Определение. Каноническое уравнение параболы. Построение параболы. Оптическое свойство параболы.

- Определение параболы.
 - Вывод канонического уравнения параболы (два доказательства!).
 - Исследование линии (точки пересечения с осями координат; монотонность; симметрия; ограниченность).
 - Построение линии.
 - Пример.
 - Формулировка оптического свойства и его доказательство.
-

7) Числовые функции. Способы их задания. График функции. Операции над функциями. Исследование функций и построение графиков.

- Определение функции.
 - Пример.
 - Перечислите способы задания функции (4 способа).
 - Определение графика функции.
 - Определения операций над функциями (4 определения).
 - Примеры применения операций над функциями с решениями.
 - Перечислить пункты плана исследования функции.
 - Область определения функции (определение; пример).
 - Точки пересечения функции с осями координат (определения; способ нахождения; пример).
 - Промежутки знакопостоянства функции (определения; способ нахождения; пример).
 - Чётность функции (определения; примеры).
 - Периодичность функции (определение; пример).
 - Промежутки монотонности функции (определения; примеры).
 - Точки экстремума и экстремумы функции (определения; способ нахождения; пример).
 - Наибольшее/наименьшее значение функции (определения; способ нахождения; пример).
 - Асимптоты функции (определения; примеры).
 - Множество значений функции (определение; способы нахождения; примеры).
 - В каждом пункте предложить подробные объяснения: определения; примеры.
 - Провести полное исследование функции $y = \frac{2x}{x^2-1}$ и построить её график.
-

8) Преобразования графиков функций. Теоремы с доказательствами.

- Сформулировать и доказать теорему о построение графика функции $f(x - a) + b = y$ из графика функции $f(x) = y$.
 - Пример.
 - Сформулировать теорему о построение графика функции $kf\left(\frac{x}{l}\right) = y$ из графика функции $f(x) = y$.
 - Пример.
 - Сформулировать теоремы о построение графиков функций $-f(x) = y$; $f(-x) = y$; $|f(x)| = y$; $f(|x|) = y$ из графика функции $f(x) = y$ и доказать либо первую и третью, либо вторую и четвёртую теоремы.
 - Приведите свои примеры.
 - Постройте графики функции:
 - $y = \frac{x+2}{|x+2|}(x^2 + 4x + 3)$
 - $y = \left|2 - \sqrt{3 - |x|}\right|$
 - $y = |x - 3|(x + 1)$
 - $y = \left|2 - |1 - |x||\right|$
 - $y = \sqrt{4x^2 - 4x^2|x| + x^4}$
 - $y = |x^2 - 2x| - 3$
 - $y = \left|\frac{3x+10}{x+2}\right|$;
 - $y = \frac{|x|}{|x|-1}$
-

9) Сравнения по модулю. Определение. Свойства (формулировки, доказательства). Примеры применения.

- Дайте определение сравнения по модулю.
 - Сформулируйте свойства сравнения по модулю (10 шт.) и докажите их.
 - Приведите примеры на каждое из доказанных свойств.
 - Укажите какие-нибудь области применения сравнений по модулю с объяснением (нахождение остатков от деления заданных чисел на заданные; доказательство теорем (МТФ) и вывод формул (признаки делимости, бином Ньютона и т.д.)
-

10) Квадратный корень из действительного числа. Определение. Вычисление квадратных корней. Геометрические приложения квадратных корней. Свойства квадратных корней (с доказательством). Формула сложных радикалов.

- Дайте определение арифметического квадратного корня из действительного числа.
- Предложите Ваш хотя бы один практический способ вычисления арифметического квадратного корня из действительного числа.
- Укажите примеры геометрических приложений квадратных корней с необходимым обоснованием.
- Сформулируйте и докажите свойства квадратных корней (5 свойств).
- Приведите примеры использования свойств квадратных корней.
- Предложите формулу сложных радикалов и выведите её.
- Пример.

11) Общее уравнение 2-го порядка с двумя переменными.

- Определение общего уравнения линии второго порядка с двумя переменными.
- Порядок линии.
- Общее уравнение линии первого порядка
- Общее уравнение линии второго порядка
- *Осуществите переход от уравнения: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + Q = 0$ к уравнению без слагаемого с xy с помощью формул перехода к другой системе координат.*
- *Предложите условия на коэффициенты уравнения и приёмы, приводящие к уравнениям окружности, эллипса, гиперболы, параболы, пары прямых, точки или мнимой кривой*
- Приведите классификацию линий второго порядка с указанием соответствующих уравнений.
- Приведите примеры.

12) Формулы преобразования декартовых координат. Выводы. Примеры.

- Выведите формулы преобразования декартовых координат (три случая).
- Пример применения формул с объяснениями и необходимыми выкладками.

13) Квадратный трёхчлен. Исследование квадратного трёхчлена. Теоремы о расположении корней квадратного трёхчлена в зависимости от известных чисел. Задачи с параметрами.

- Определение квадратного трёхчлена.
- Исследуйте квадратный трёхчлен (с помощью одного из двух подходов: по плану исследования функции или через каноническую параболу и геометрические преобразования графиков функций).
- Как итог: выработайте два способа построения параболы: путём исследования функции или через выделение целого квадрата и геометрические преобразования графиков функций.
- Сформулируйте теоремы о расположении корней квадратного трёхчлена в зависимости от известных чисел и докажите две из них. Прокомментируйте доказательство оставшихся теорем.
- Сформулируйте задачи с параметрами в общем виде, решаемые на основании выше изложенных теорем и предложите способы их решения.
- Примеры задач с параметрами.

14) Квадратные уравнения и их корни. Решение квадратного уравнения (выделение целого квадрата, неполное квадратное уравнение, формула корней). Формулы Виета. Уравнения и системы уравнений, сводящиеся к квадратным уравнениям. Основные методы и приёмы решений.

- Дайте определение квадратного уравнения. Приведите пример.
- Дайте определение корня квадратного уравнения.
- Приведите виды неполных квадратных уравнений, укажите способы их решений. Приведите примеры неполных квадратных уравнений с решениями.
- Опишите метод выделения целого квадрата решения полного квадратного уравнения. Приведите пример.
- Укажите, что называется дискриминантом квадратного уравнения.
- Выведите формулу корней квадратного уравнения.
- Проведите исследование количества корней квадратного уравнения в зависимости от знака дискриминанта квадратного уравнения.

- Приведите пример решения квадратного уравнения по формуле корней.
- Сформулируйте и докажите теорему Виета для многочленов второй степени. Не забудьте в формулировке про слова “необходимо и достаточно” или намеренно сформулируйте две теоремы в одной, в которых Вы покажете переход от корней многочлена к системе, и, наоборот, переход от системы к корням многочлена.
- Приведите примеры применения теоремы Виета (два примера для многочленов второй степени, иллюстрирующие прямую и обратную теорему Виета).
- Приведите основные приёмы и методы решения уравнений и систем уравнений, сводящихся к квадратным (не забудьте рассмотреть случай однородного уравнения; случай возвратного уравнения; случай системы уравнений, сводящейся к системе, содержащей однородное уравнение; метод замены переменной; графический способ и т.д.)

15) Свойства числовых неравенств. Решения неравенств. Основные методы и приёмы решений.

- Дайте определение неравенства, числового неравенства.
- Сформулируйте и докажите свойства числовых неравенств.
- Приведите примеры.

16) Формулы Коши.

- Сформулируйте и докажите неравенства Коши для двух, трёх, n слагаемых.
- Приведите примеры применения неравенств Коши.

17) Теоремы о равносильных преобразованиях в уравнениях и неравенствах.

- Сформулируйте все теоремы о равносильных преобразованиях в уравнениях и неравенствах.
- Докажите некоторые теоремы о равносильных преобразованиях в уравнениях и неравенствах.
- Приведите примеры использования теорем.

18) Формула Кардано. Вывод формулы. Пример применения. Метод Феррари. Описание метода с необходимыми выкладками. Пример применения.

- Дайте определение неприведённого уравнения третьей степени $a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 = 0$.
- Перейдите к приведённому уравнению третьей степени $x^3 + a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$.
- Произведите замену $x = y - \frac{a}{3}$ в полученном уравнении третьей степени, приведите выкладки, покажите переход к уравнению $y^3 + p \cdot y + q = 0$.
- Сделайте замену в полученном уравнении $y = z - \frac{p}{3z}$ ($z \neq 0$), показывая переход к уравнению $z^6 + q \cdot z^3 - \frac{p^3}{27} = 0$.

• Решите последнее уравнение, сделав замену $z^3 = t$ и получите корни $z = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$;

$z = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$ нового уравнения.

- Вспомогая, что $y = z - \frac{p}{3z}$ ($z \neq 0$), докажите, что $y_1 = y_2$. (Можно, непосредственно производя алгебраические выкладки, а можно II способом через теорему Виета).
- Укажите, как найти остальные корни уравнения третьей степени $x^3 + a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$.
- Укажите, как перейти к корням уравнения $a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 = 0$.
- Сделайте вывод о количестве и качестве корней уравнения третьей степени в зависимости от дискриминанта кубического уравнения. (Дискриминант кубического уравнения: $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$).
- $D < 0$. Уравнение имеет три различных вещественных корня.
- $D = 0$. Тогда хотя бы два корня совпадают. Это может быть, когда уравнение имеет один вещественный корень, кратности два, и ещё один вещественный корень, отличный от первых двух. Или все три корня совпадают.
- $D > 0$. Уравнение имеет один вещественный и пару комплексных корней).
- Приведите пример уравнения третьей степени и решите его по формуле Кардано.

19. Метод Феррари. Описание метода с необходимыми выкладками. Пример применения.

- Дайте определение неприведённого уравнения четвёртой степени: $a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$.
 - Перейдите к приведённому уравнению четвёртой степени: $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.
 - Произведите замену $x = y - \frac{a}{4}$ в полученном уравнении четвёртой степени, приведите выкладки, покажите переход к уравнению $y^4 + py^2 + qy + r = 0$.
 - Добавляя и вычитая к левой части уравнения выражение $2sy^2 + s^2$, где s – некоторое число, получите уравнение $(y^2 + s)^2 + (p - 2s)\left(y + \frac{q}{2(p-2s)}\right)^2 - \frac{q^2}{4(p-2s)} + r - s^2 = 0$.
 - Докажите, что можно выбрать число s так, чтобы $-\frac{q^2}{4(p-2s)} + r - s^2 = 0$.
 - Укажите, что называют кубической резольвентой уравнения 4-й степени.
 - Покажите, как далее дорешать уравнение $(y^2 + s)^2 + (p - 2s)\left(y + \frac{q}{2(p-2s)}\right)^2 = 0$.
 - Укажите, как перейти к корням уравнения $a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$.
 - Приведите пример уравнения четвёртой степени и решите его по методу Феррари.
-

20. Линейная функция.

- Сформулируйте и докажите теорему о задании прямой линейным уравнением.
- Способ I. Использование векторов.
- Определение общего уравнения прямой на плоскости в прямоугольной системе координат Oxy .
 - Можно использовать и способ II. Использование серединного перпендикуляра.
 - Приведите пример общего уравнения прямой.
 - Постройте график уравнения.
 - Является ли график этого уравнения графиком некоторой функции? Если – да, то какой? Приведите объяснения.
 - Объясните, как перейти к уравнению прямой с угловым коэффициентом.
 - Не забудьте рассказать про прямые, заданные уравнениями $y = \text{const}$, $x = \text{const}$.
 - Дайте определение функции.
 - Дайте определение линейной функции. (Не забудьте показать, почему зависимость $y = kx + b$ – функциональная).
 - Приведите пример линейной функции и постройте её график.
 - Сформулируйте критерии параллельности, совпадения и пересечения прямых, заданных общими уравнениями и уравнениями с угловым коэффициентом. Приведите подробные объяснения сформулированных критериев.
 - Приведите примеры использования критериев параллельности, совпадения и пересечения прямых, заданных общими уравнениями и уравнениями с угловым коэффициентом на практике.
 - Придумайте задачу с параметрами, решаемую с использованием критериев параллельности, совпадения и пересечения прямых, и решите её.
-

21. Золотое сечение. Определение. Построение с помощью циркуля и линейки. Доказательство. Золотое сечение в правильном пятиугольнике. Построение правильного пятиугольника с помощью циркуля и линейки. Доказательства.

- Что значит решить задачу на построение с помощью циркуля и линейки?
- Любую ли задачу на построение можно решить с помощью циркуля и линейки?
- Приведите примеры задач, решаемых и не решаемых с помощью циркуля и линейки? Приведите необходимые обоснования.
- Дайте определение золотого сечения.
- Постройте золотое сечение с помощью циркуля и линейки, описав этапы построения и доказательства.
- Дайте определение правильного пятиугольника.
- Найдите золотое сечение в правильном треугольнике.
- Постройте правильный пятиугольник с помощью циркуля и линейки, описав этапы построения и доказательства.
- Знаете ли Вы, где можно встретить золотое сечение в природе? Известны ли Вам сферы практической деятельности человека, в которых используются принципы золотого сечения?